



ISEL

MODELAÇÃO EM FÍSICA E ENGENHARIA

~ ANÁLISE DE FOURIER ~



Gustavo Brazil A51050

Licenciatura em engenharia física aplicada | junho de 2024

Índice

1. Objetivo -----	3
2. Base Teórica -----	3
3. Programa -----	6
4. Visualização Gráfica -----	9
i. Cordas Soltas -----	10
ii. Acordes Maiores -----	16
iii. Acordes Menores -----	18
iv. Harmónico -----	20
5. Análise -----	21
6. Conclusão -----	22
7. Referências -----	22

1. Objetivo

Neste trabalho, pretende-se realizar uma análise detalhada das frequências presentes em um som emitido por uma guitarra, utilizando a Transformada de Fourier. Deste modo, neste estudo, será também abordada a componente musical, explorando como as diferentes frequências contribuem para a sonoridade e a harmonia do instrumento.

2. Base Teórica

A Transformada de Fourier Discreta (*Discrete Fourier Transform* — DFT) é uma técnica matemática utilizada para analisar sinais discretos no domínio do tempo, convertendo-os em suas componentes de frequência. Matematicamente, a DFT transforma um sinal discreto f_i , composto por N amostras, em um conjunto de N valores complexos F_k , que representam as amplitudes e fases das frequências componentes do sinal original. A DFT é definida pela seguinte fórmula [3]:

$$F_k = \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-j2\pi ki/N} \quad (1)$$

Onde f_i é o sinal de entrada no domínio do tempo; F_k é o valor da DFT no índice k , representando a amplitude e fase da frequência correspondente; N é o número total de amostras do sinal; k é o índice de frequência, variando de 0 a $N - 1$; j é a unidade imaginária ($j^2 = -1$); $e^{-j2\pi ki/N}$ são os coeficientes exponenciais complexos.

A DFT decompõe o sinal original em uma soma de senos e cossenos, cada uma com uma frequência específica. Os coeficientes F_k indicam a contribuição (apresentada posteriormente no trabalho como “magnitude de frequência”) de cada frequência ao sinal original. A parte real de F_k representa a magnitude das componentes de seno, enquanto a parte imaginária representa a magnitude das componentes de cosseno.

Sendo assim, ao utilizarmos a Transformada de Fourier Discreta em um sinal, obtemos algo como:

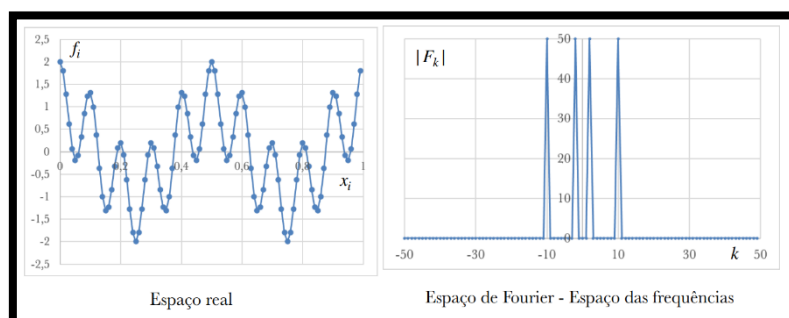


Figura A – Espaço real/Espaço das frequências [3].

Neste trabalho fora utilizada a Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* – FFT) [4] que se relaciona com a DFT. A DFT possui uma complexidade computacional elevada e para superar essa limitação, a FFT foi desenvolvida, diminuindo então a complexidade.

Portanto, a FFT é um método eficiente para calcular a DFT, pois este acelera o processo de computação da DFT, permitindo que ela seja utilizada em aplicações em tempo real e para grandes conjuntos de dados.

Quando falamos sobre frequências de sinais, caso estes sinais sejam sonoros, podemos diretamente relacioná-las com o campo musical.

Neste campo, conhecemos doze notas, sendo estas:

C C# D D# E F F# G G# A A# B

Nome	Rep. Nota/Acorde Maior	Rep. Acorde Menor
Dó	C	Cm
Dó Sustenido	C#	C#m
Ré	D	Dm
Ré Sustenido	D#	D#m
Mí	E	Em
Fá	F	Fm
Fá Sustenido	F#	F#m
Sol	G	Gm
Sol Sustenido	G#	G#m
Lá	A	Am
Lá Sustenido	A#	A#m
Si	B	Bm

Figura B – Representação das notas, acordes maiores e acordes menores.

CAMPO HARMÔNICO MAIOR								
Dó	C	D	E	F	G	A	B	
Dó Sustenido	C#	D#	F	F#	G#	A#	C	
Ré	D	E	F#	G	A	B	C#	
Ré Sustenido	D#	F	G	G#	A#	C	D	
Mí	E	F#	G#	A	B	C#	D#	
Fá	F	G	A	A#	C	D	E	
Fá Sustenido	F#	G#	A#	B	C#	D#	F	
Sol	G	A	B	C	D	E	F#	
Sol Sustenido	G#	A#	C	C#	D#	F	G	
Lá	A	B	C#	D	E	F#	G#	
Lá Sustenido	A#	C	D	D#	F	G	A	
Si	B	C#	D#	E	F#	G#	A#	

Figura C – Representação dos campos harmônicos maiores de cada nota.

Para além da representação apresentada na figura B, podemos ter ainda a indicação da sua oitava¹, que está associada às frequências [1], e desta forma, a nota C na oitava 1 representa-se por C1, na oitava 2 representa-se por C2 e assim por diante. Quando uma frequência para o dobro ou para metade, afirmamos que esta “oitavou” para cima ou para baixo, respetivamente, pois estes novos sons terão a mesma identidade que a inicial, mas mais aguda (maior frequência) ou mais grave (menor frequência).

Na figura C, vemos a representação do campo harmónico maior de cada nota, sendo esta nota principal, a qual pertence o campo harmónico, conhecida como Tónica. Matematicamente, sabemos também que as notas que compõem os campos são frações desta nota tónica [1].

Outro aspeto em música, extremamente importante para instrumentos, é a afinação.

Para uma guitarra, a afinação padrão é:

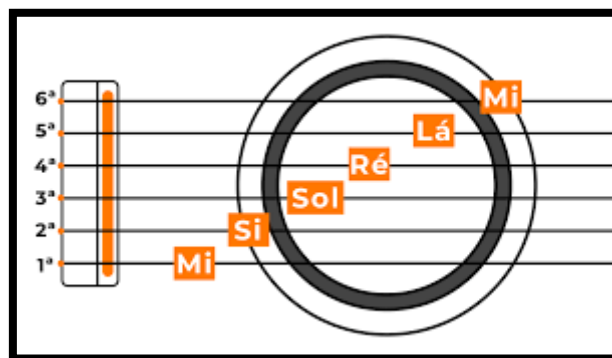


Figura D – Representação da afinação padrão de uma guitarra.

- 1ª Corda — E4 (Mi – 4ª oitava).
- 2ª Corda — B3 (Si – 3ª oitava).
- 3ª Corda — G3 (Sol – 3ª oitava).
- 4ª Corda — D3 (Ré – 3ª oitava).
- 5ª Corda — A2 (Lá – 2ª oitava).
- 6ª Corda — E2 (Mi – 2ª oitava).

¹ Intervalo de oito notas do campo harmónico para cima ou para baixo.

3. Programa

Para a realização deste trabalho, desenvolveu-se um programa em linguagem Python capaz de ler um arquivo de áudio, registrar seus valores de intensidade² ao longo do tempo (s) e traçar esse gráfico. Além disso, aplicando a transformada de Fourier, o programa apresenta um gráfico de magnitude³ em função da frequência (Hz).

Primeiramente, foram importadas as bibliotecas e módulos necessários.

```
1 import os
2 import numpy as np
3 import scipy.io.wavfile as wav
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 from scipy.fftpack import fft
```

O módulo “os”, integrante da biblioteca padrão do Python, foi utilizado para verificar a existência do arquivo de áudio WAV no caminho especificado. Numpy, uma biblioteca essencial, foi empregada neste trabalho para efetuar cálculos relacionados ao processamento de sinal, tais como a criação de vetores de tempo e manipulação de dados de áudio. O módulo “scipy.io.wavfile”, parte da biblioteca SciPy, desempenhou um papel crucial ao possibilitar a leitura de arquivos de áudio WAV e a extração de informações como taxa de amostragem e dados do áudio, sendo uma ferramenta central para manipulação de arquivos de áudio no código. “scipy.fftpack.fft”, outro módulo da biblioteca SciPy, foi utilizado para calcular a Transformada de Fourier, contribuindo para análises avançadas de sinais. Por fim, Matplotlib, uma biblioteca amplamente utilizada, foi importada para gerar gráficos em Python, proporcionando a visualização dos dados resultantes.

² Intensidade da onda sonora em unidades digitais que dizem respeito à sua amplitude, que varia entre -32768 e 32767 para um áudio de 16 bits, conforme utilizado neste trabalho, sem uma equivalência direta em unidades físicas, como pascal (Pa) para a pressão, requerendo calibrações para uma conversão precisa.

³ Magnitude das componentes de frequência resultantes da Transformada de Fourier, as quais descrevem a contribuição de cada frequência para o sinal.

Para a visualização do sinal sonoro gravado, criou-se uma função capaz de recolher os dados de tempo e intensidade sonora ao longo do mesmo, onde fora feito o *plot* do gráfico Intensidade-Tempo, sendo também salvo em PNG.

```
22 # Função para fazer Plot da intensidade da onda em função do tempo
23 def plot_time_domain(rate, data, output_png='time_domain.png'):
24     times = np.arange(len(data)) / float(rate)
25
26     plt.figure(figsize=(12, 6))
27     plt.plot(times, data)
28     plt.title('Intensidade da onda em função do tempo')
29     plt.xlabel('Tempo (s)')
30     plt.ylabel('Intensidade')
31
32     # Divisões no eixo x
33     max_time = times[-1]
34     x_ticks = np.linspace(0, max_time, num=20)
35     plt.xticks(x_ticks)
36
37     plt.grid(True)
38     plt.savefig(output_png)
39     plt.show()
40
```

Partindo o domínio das frequências, fora feito uma função que aplicasse a Transformada de Fourier (FFT) e obtivesse os dados de magnitude e frequência, fazendo assim um gráfico Magnitude-Frequência, e guardando o mesmo em formato PNG.

```
41 # Função para aplicar a Transformada de Fourier e fazer Plot da intensidade em função da frequência
42 def plot_frequency_domain(rate, data, output_png='frequency_domain.png'):
43     n = len(data)
44     k = np.arange(n)
45     T = n / rate
46     frq = k / T # vetor de frequência
47     frq = frq[range(n // 2)] # pegar apenas a metade positiva das frequências
48
49     Y = fft(data) / n # Calcula a FFT e normaliza
50     Y = Y[range(n // 2)]
51
52     plt.figure(figsize=(50, 15))
53     plt.plot(frq, abs(Y))
54     plt.title('Magnitude em função da frequência', fontsize=35)
55     plt.xlabel('Frequência (Hz)', fontsize=35)
56     plt.ylabel('Magnitude de Frequência', fontsize=35)
57
```

Para que fosse possível a comprovação física de que as notas musicais que formam um campo harmónico maior são frações da tónica em qualquer oitava, nessa mesma função definiu-se o eixo das frequências com espaçamentos iguais a frequência da tónica (escolheu-se a menor frequência que fosse de melhor visualização geral).

Fora também limitado o gráfico de 0Hz a 3000Hz, pois este não tinha informação relevante além desse intervalo.

```
57
58     # Limitar eixo x de 0 a 3000 Hz
59     plt.xlim(0, 3000)
60
61     # Divisões no eixo x
62     x_ticks = np.arange(0, 3000, 32.70)
63     plt.xticks(x_ticks)
64
65     plt.grid(True)
66     plt.savefig(output_png)
67     plt.show()
```

Espaçamento do eixo, onde é introduzida a frequência da nota tónica para cada caso.

Por fim, define-se uma função capaz de obter o arquivo de áudio através do diretório do mesmo e efetuar as funções previamente mencionadas.

```
69 # Main
70 def main():
71     filename = r"C:\Users\Gustavo Brazil\Desktop\untitled.wav" # Caminho do arquivo de áudio
72
73     # Ler arquivo WAV
74     rate, data = read_wav_file(filename)
75
76     if rate is None or data is None:
77         print("Failed to read the WAV file. Please check the file path and try again.")
78         return
79
80     # Verificar se o áudio é estéreo ou mono e usar apenas um canal se for estéreo
81     if len(data.shape) > 1:
82         data = data[:, 0]
83
84     # Fazer Plot da intensidade da onda em função do tempo e salvar PNG
85     plot_time_domain(rate, data)
86
87     # Fazer Plot da intensidade em função da frequência e salvar PNG
88     plot_frequency_domain(rate, data)
89
90 if __name__ == '__main__':
91     main()
```

A condição `if __name__ == '__main__': main()` garante que o código dentro do bloco corra apenas se o *script* for executado diretamente como programa principal. Isso evita que o código seja executado se o arquivo for importado como um módulo em outro *script*, permitindo reutilizar as funções definidas sem executar a lógica principal.

4. Visualização Gráfica

Para a gravação dos áudios foram utilizados os seguintes equipamentos:



Behringer U-Phoria UMC202HD



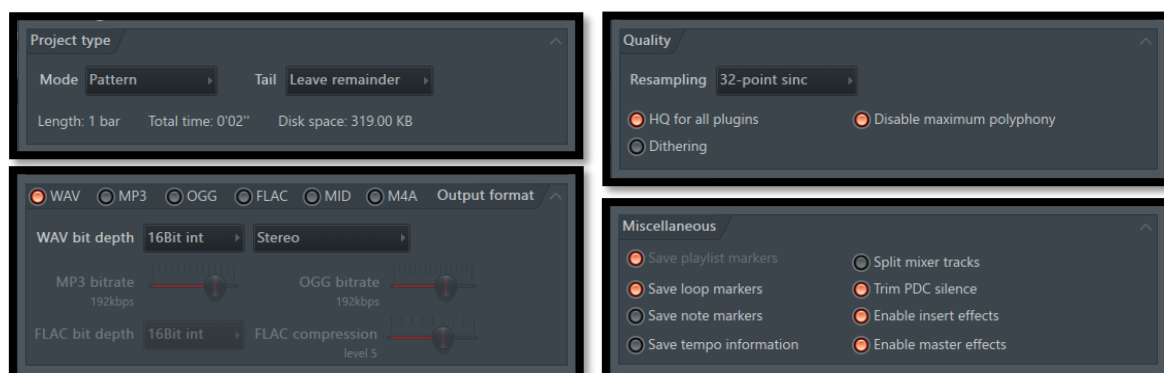
Cabo Jack



Fender CD-60SCE

A gravação foi realizada utilizando o *software* FL Studio, e sem equalizações presentes nas configurações da guitarra, estando também a guitarra com a finaço padrão.

Os parâmetros de exportação de áudio, no FL Studio foram:



i. Cordas Soltas

Para esta análise, fora tocada cada corda da guitarra sem a necessidade de pressionar nenhuma casa do braço da mesma.

*Para melhor observação dos seguintes gráficos de Magnitude-Frequência ir a [2].

— Corda E4

Para o espaçamento do eixo das frequências no gráfico Magnitude-Frequência, utilizou-se a nota E (Mi), na oitava de número 1, com uma frequência de 41,20 Hz [1].

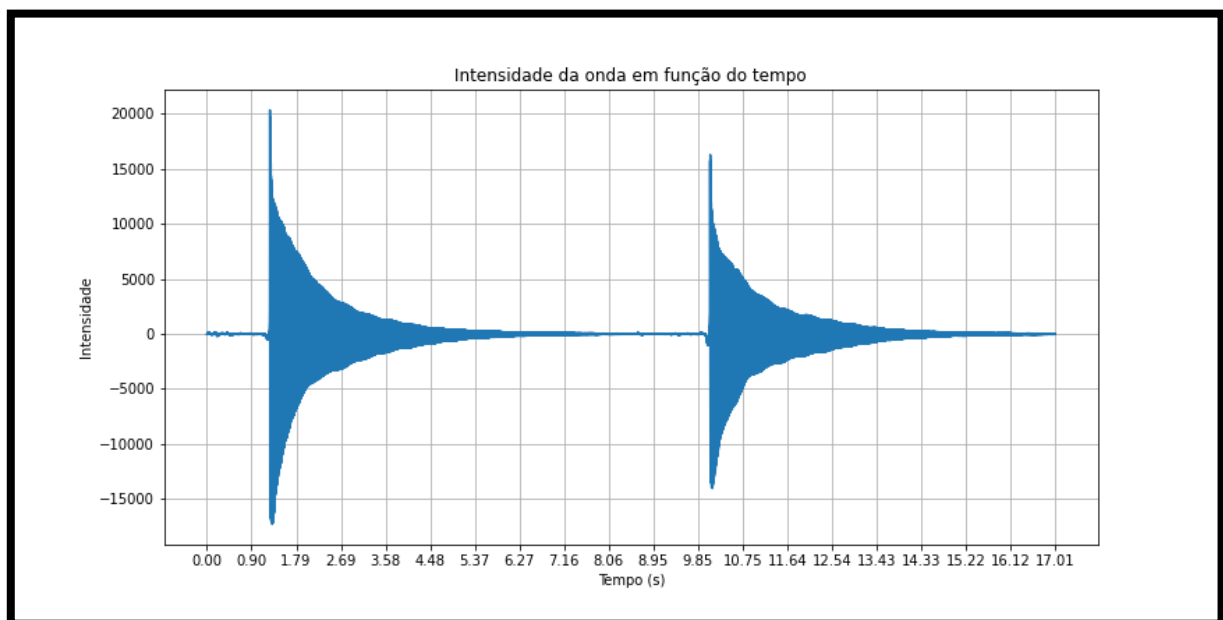


Figura 1 – Gráfico Intensidade em função do Tempo, gravação da corda E4.

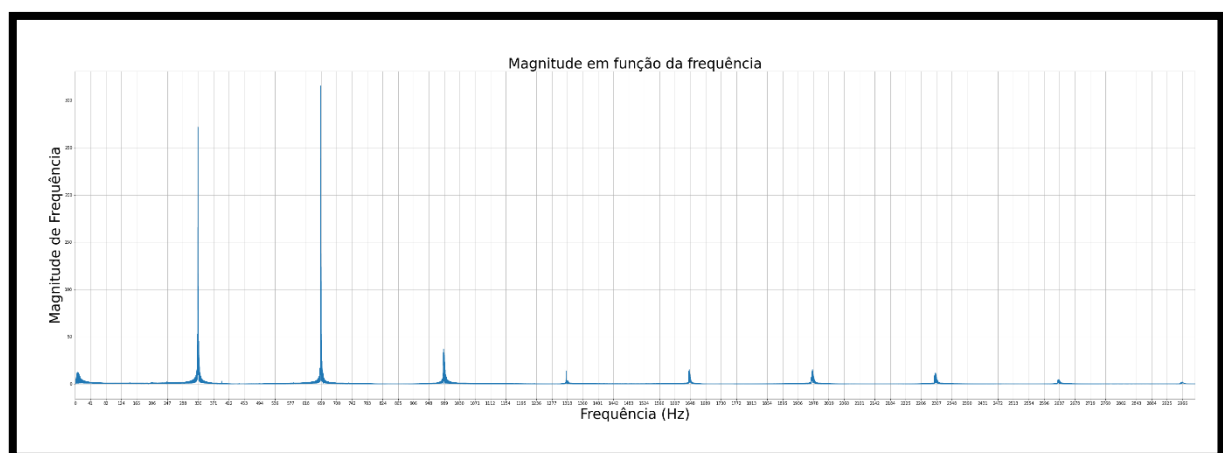


Figura 2 – Gráfico Magnitude de Frequência em função da Frequência, para a corda E4 [2].

— Corda B3

Para o espaçamento do eixo das frequências no gráfico Magnitude-Frequência, utilizou-se a nota B (Si), na oitava de número 1, com uma frequência de 61,74 Hz [1].

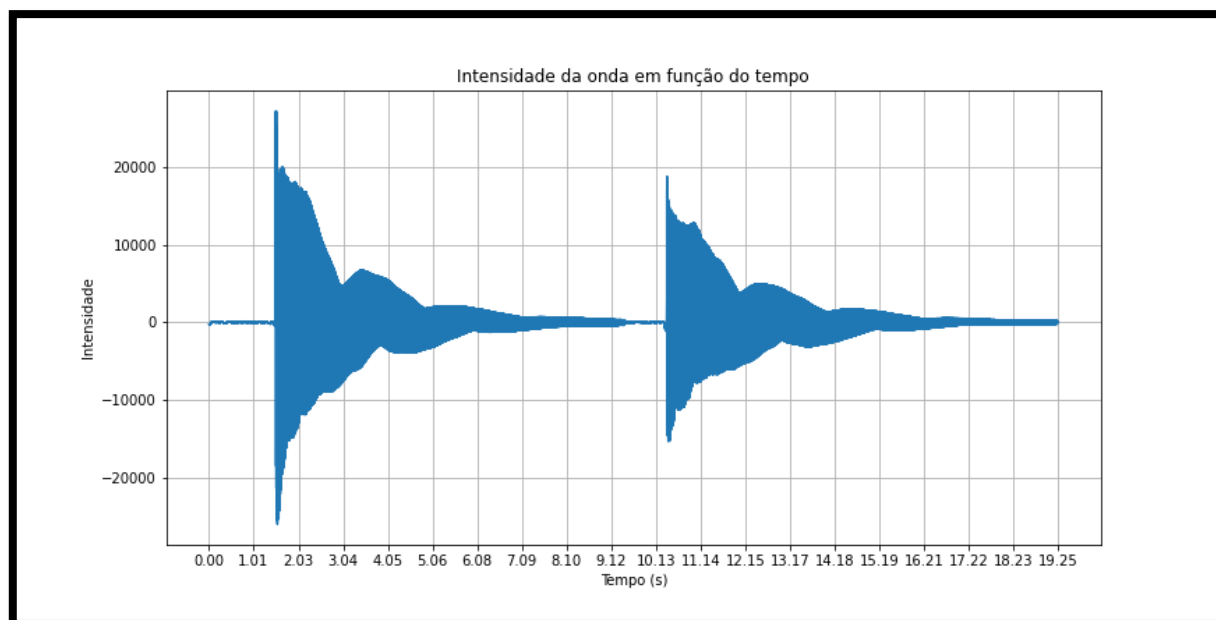


Figura 3 – Gráfico Intensidade em função do Tempo, gravação da corda B3.

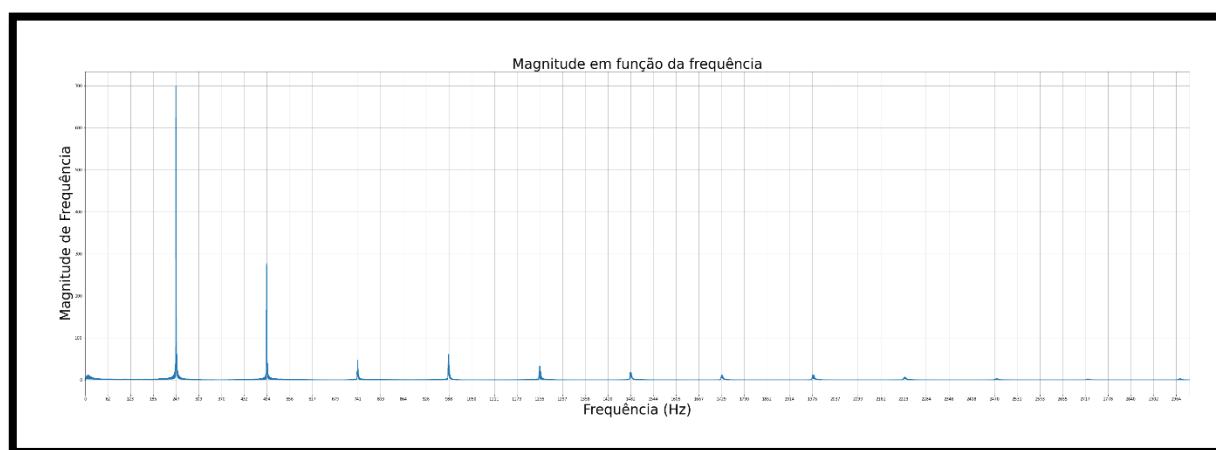


Figura 4 – Gráfico Magnitude de Frequência em função da Frequência, para a corda B3 [2].

— Corda G3

Para o espaçamento do eixo das frequências no gráfico Magnitude-Frequência, utilizou-se a nota G (Sol), na oitava de número 1, com uma frequência de 49 Hz [1].

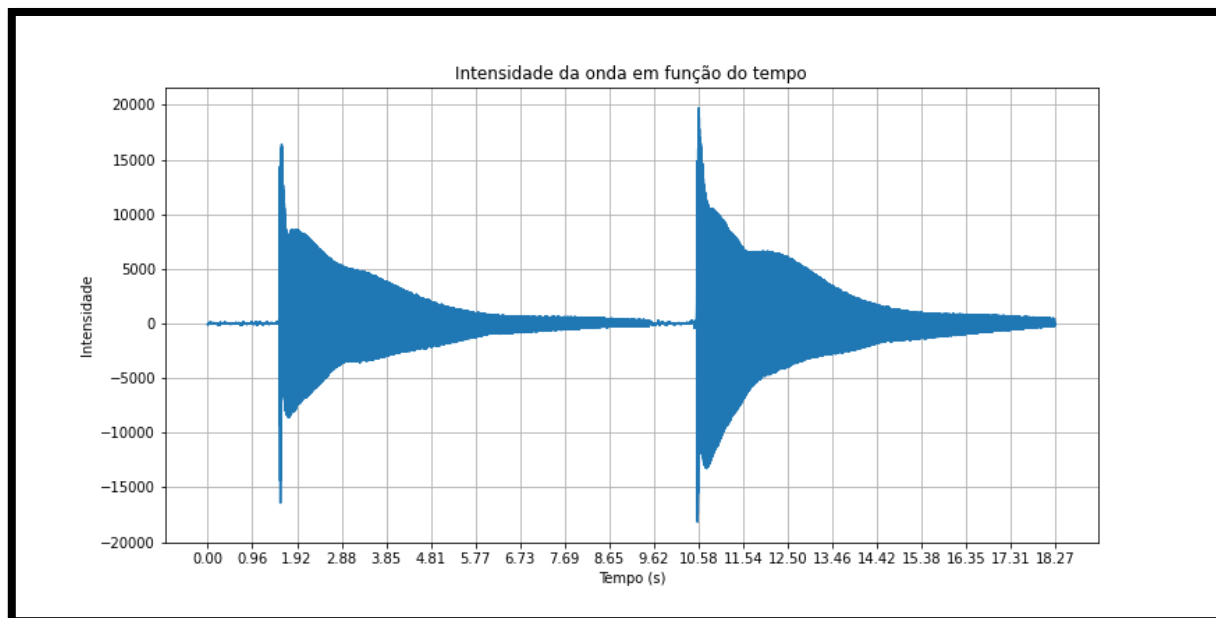


Figura 5 – Gráfico Intensidade em função do Tempo, gravação da corda G3.

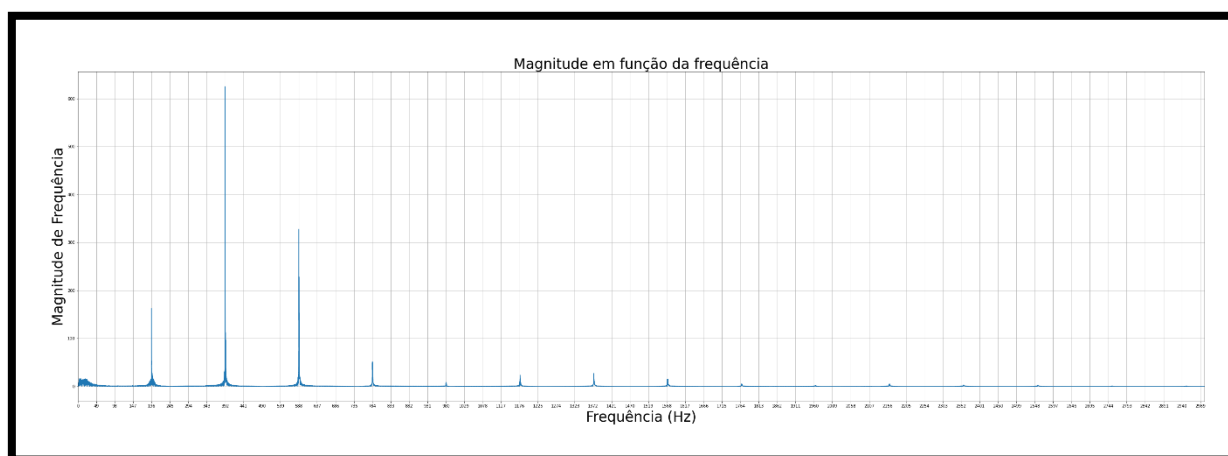


Figura 6 – Gráfico Magnitude de Frequência em função da Frequência, para a corda G3 [2].

— Corda D3

Para o espaçamento do eixo das frequências no gráfico Magnitude-Frequência, utilizou-se a nota D (Ré), na oitava de número 1, com uma frequência de 36,71 Hz [1].

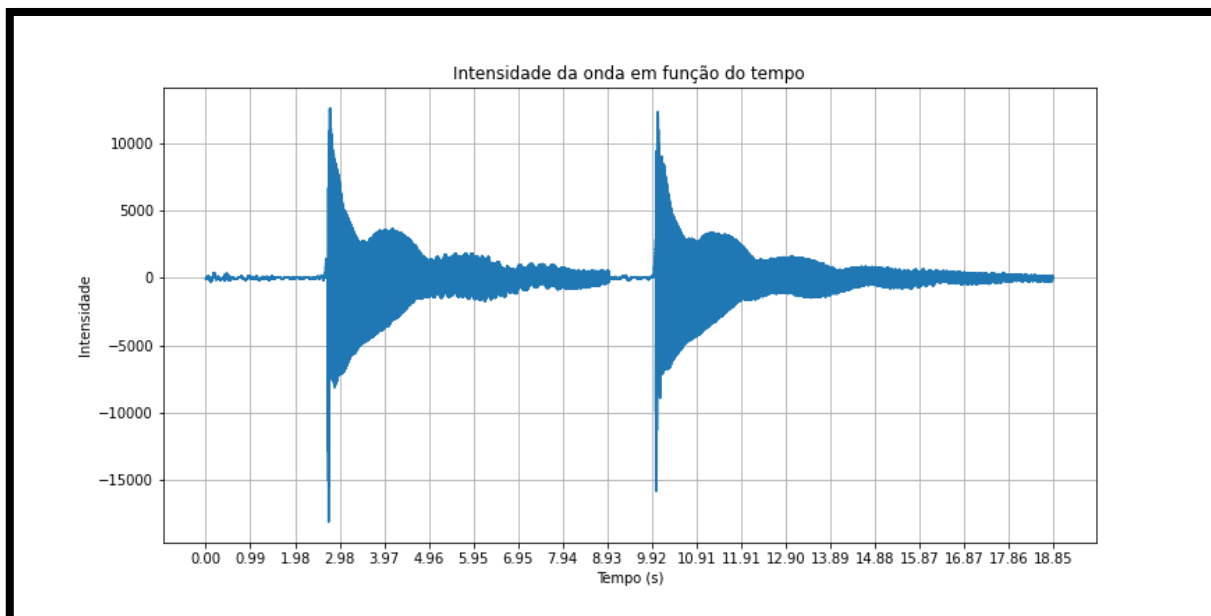


Figura 7 – Gráfico Intensidade em função do Tempo, gravação da corda D3.

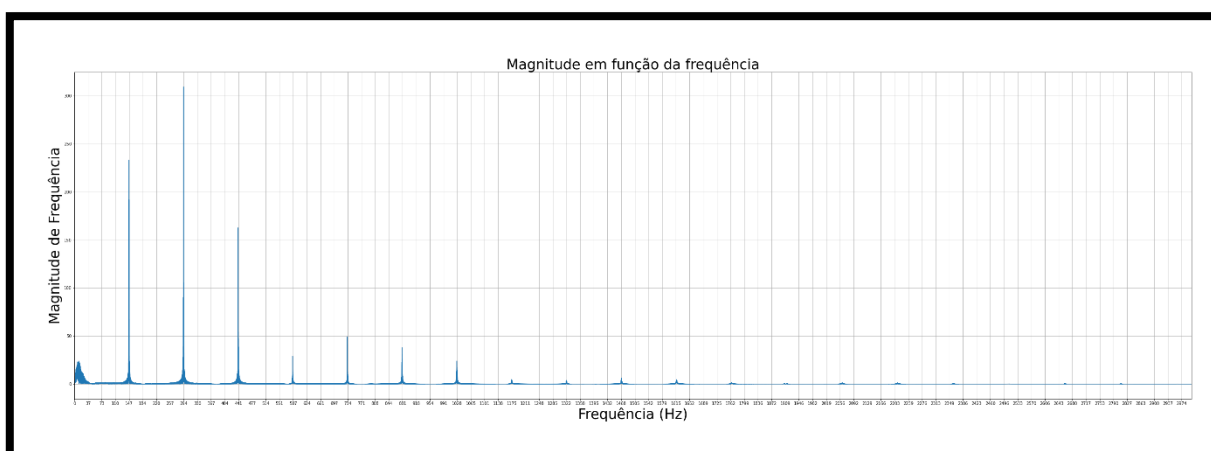


Figura 8 – Gráfico Magnitude de Frequência em função da Frequência, para a corda D3 [2].

— Corda A2

Para o espaçamento do eixo das frequências no gráfico Magnitude-Frequência, utilizou-se a nota A (Lá), na oitava de número 1, com uma frequência de 55 Hz [1].

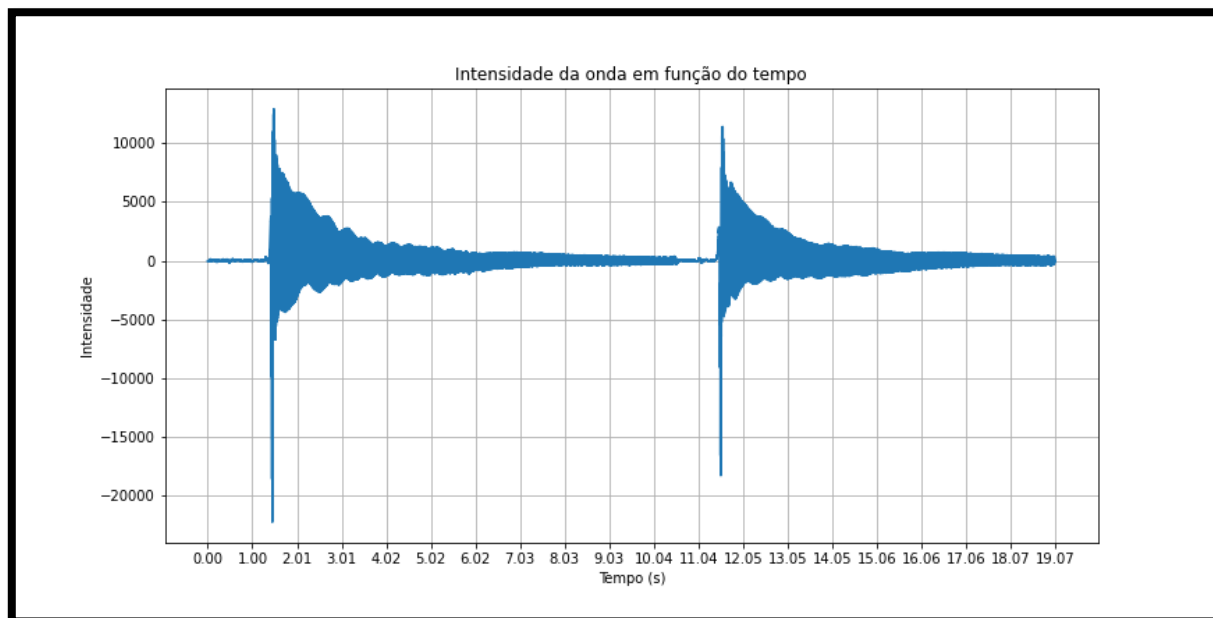


Figura 9 – Gráfico Intensidade em função do Tempo, gravação da corda A2.

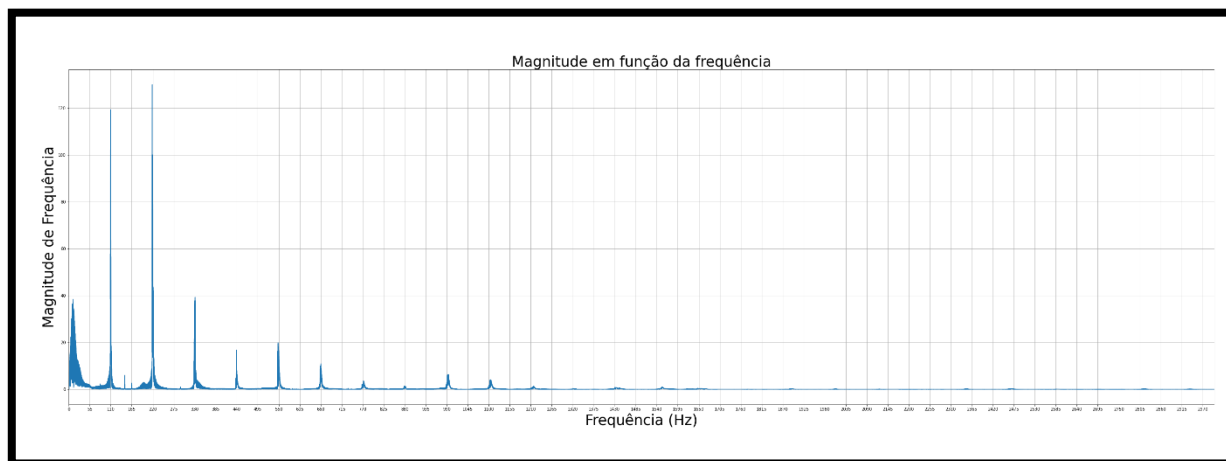


Figura 10 – Gráfico Magnitude de Frequência em função da Frequência, para a corda A2 [2].

—Corda E2

Para o espaçamento do eixo das frequências no gráfico Magnitude-Frequência, utilizou-se a nota E (Mi), na oitava de número 1, com uma frequência de 41,20 Hz [1].

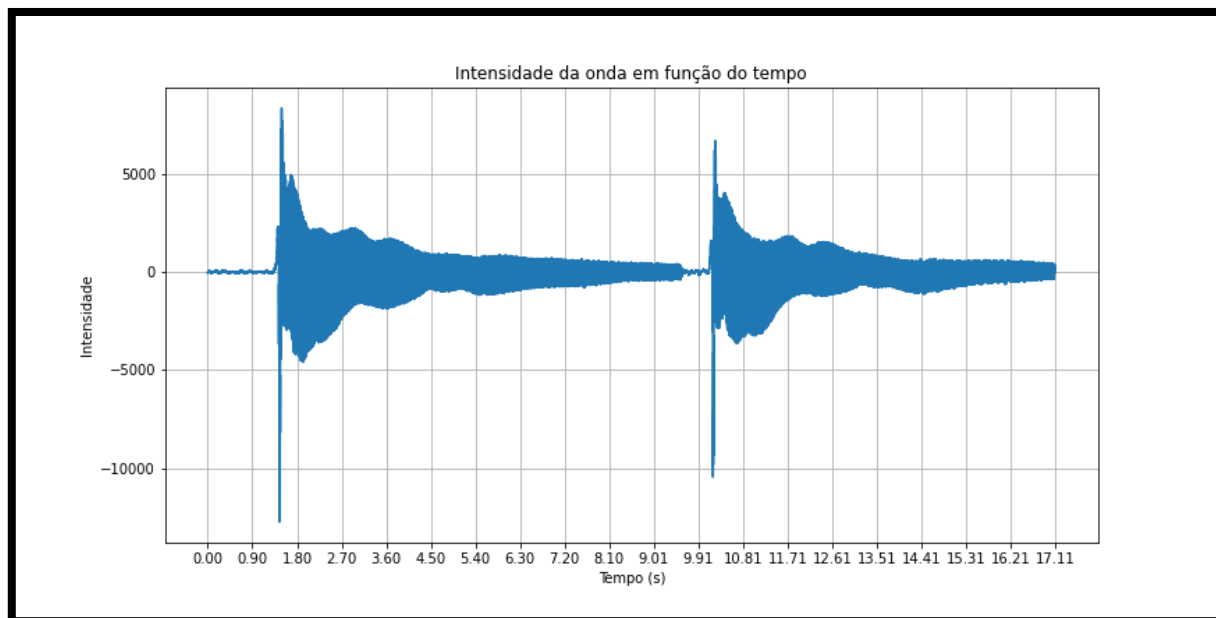
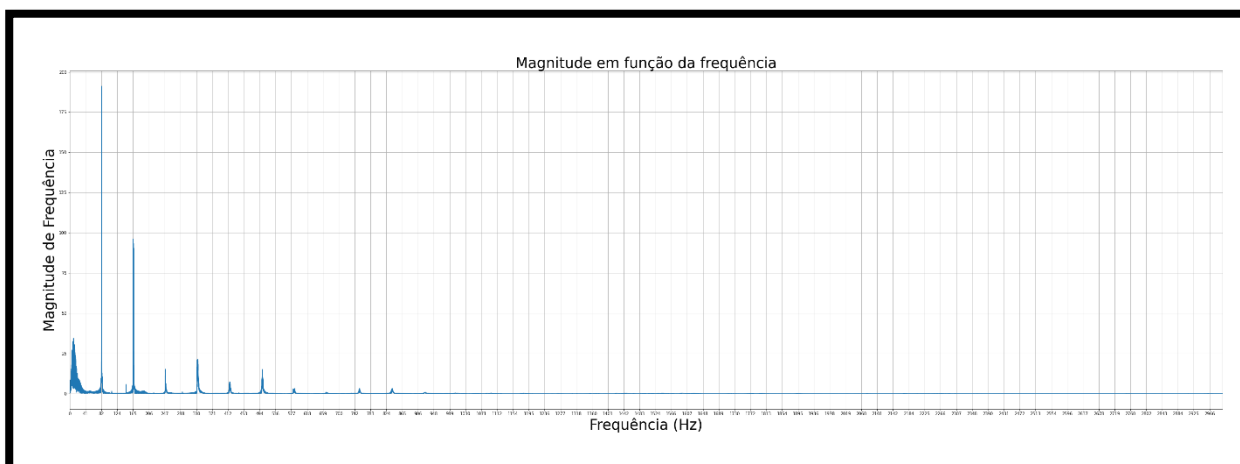


Figura 11 – Gráfico Intensidade em função do Tempo, gravação da corda E2.



ii. Acordes Maiores

— Acorde de A Maior

Para o espaçamento do eixo das frequências no gráfico Magnitude-Frequência, utilizou-se a nota A (Lá), na oitava de número 1, com uma frequência de 55 Hz [1].

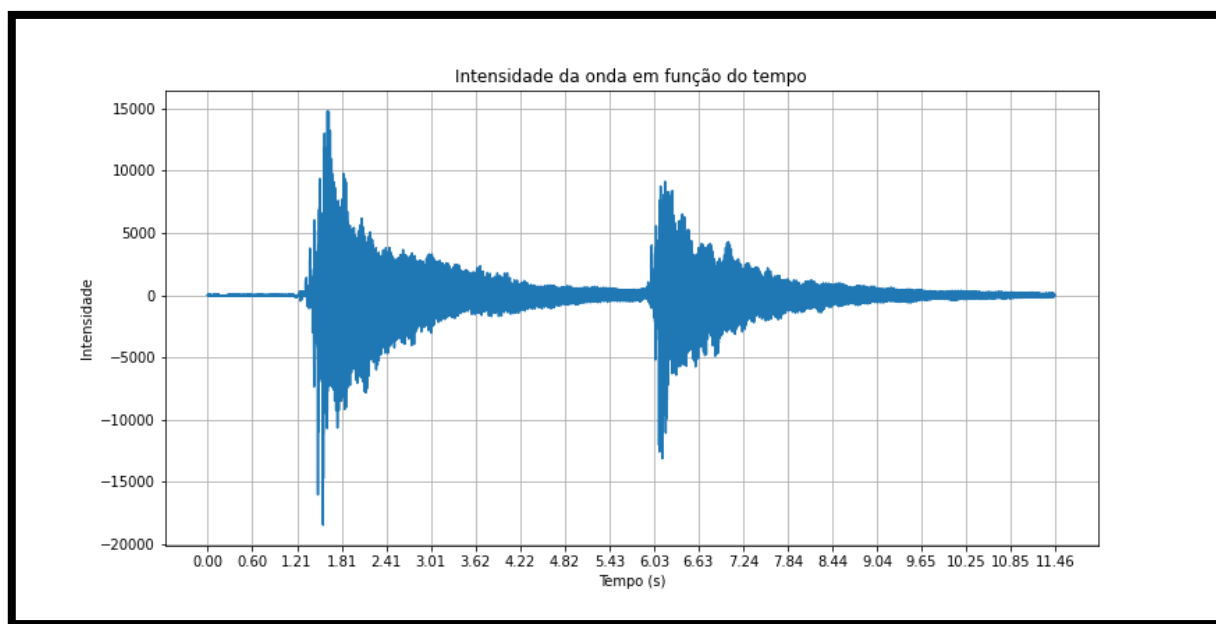


Figura 13 – Gráfico Intensidade em função do Tempo, gravação do acorde de A Maior.

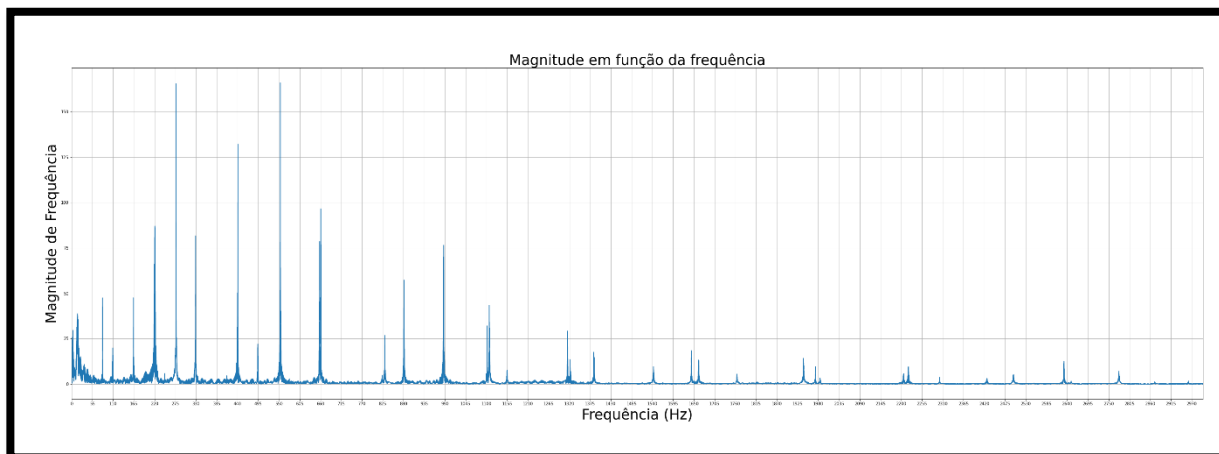


Figura 14 – Gráfico Magnitude de Frequência em função da Frequência, para o acorde de A Maior [2].

— Acorde de D Maior

Para o espaçamento do eixo das frequências no gráfico Magnitude-Frequência, utilizou-se a nota D (Ré), na oitava de número 1, com uma frequência de 36,71 Hz [1].

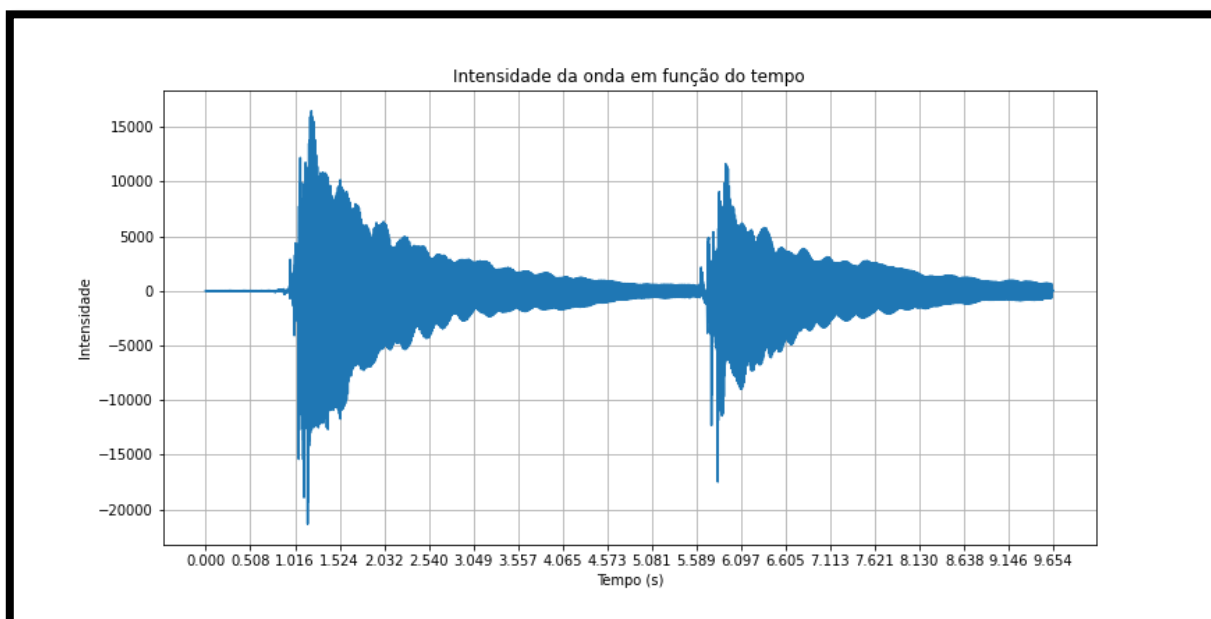


Figura 15 – Gráfico Intensidade em função do Tempo, gravação do acorde de D Maior.

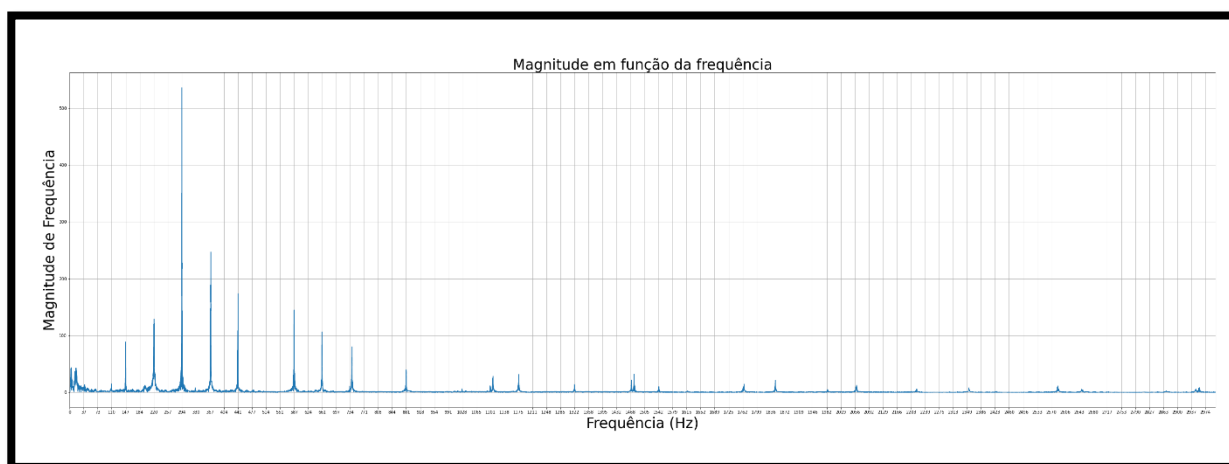


Figura 16 – Gráfico Magnitude de Frequência em função da Frequência, para o acorde de D Maior [2].

iii. Acordes Menores

— Acorde de A Menor

Como o acorde de acorde de A Menor (Lá Menor) pertence ao campo harmónico dos acordes de C (Dó), as notas desse acorde também pertencem ao campo harmónico de Dó. Então, para o espaçamento do eixo das frequências no gráfico Magnitude-Frequência, utilizou-se a nota C, na oitava de número 1, com uma frequência de 32,70 Hz [1].

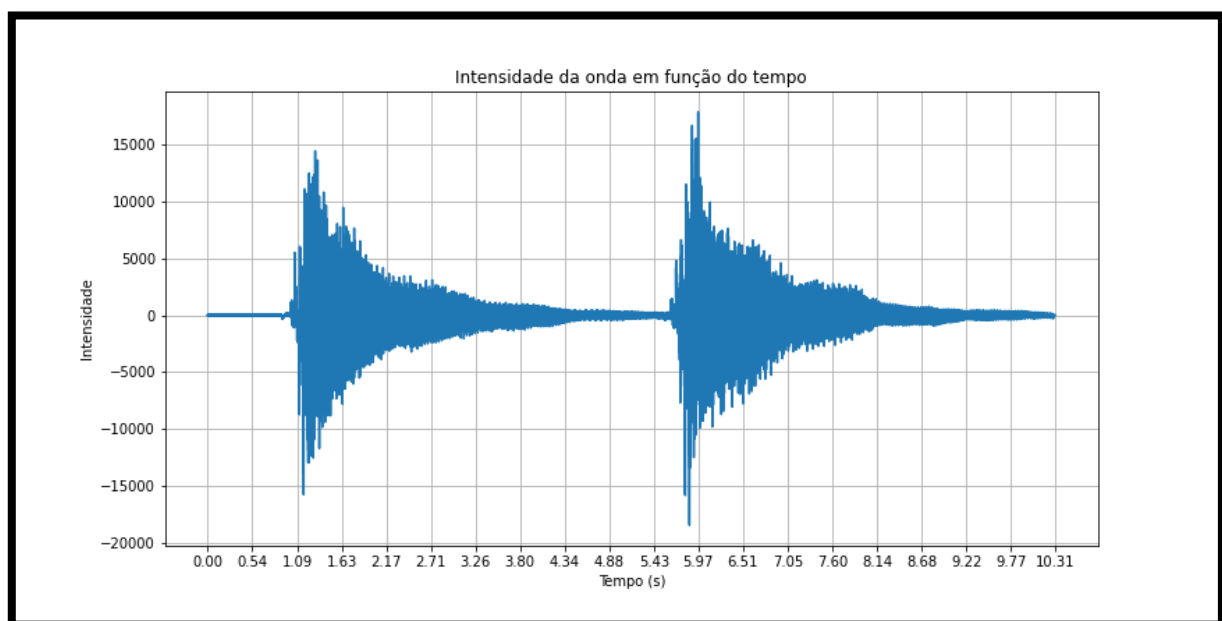


Figura 17 – Gráfico Intensidade em função do Tempo, gravação do acorde de A Menor.

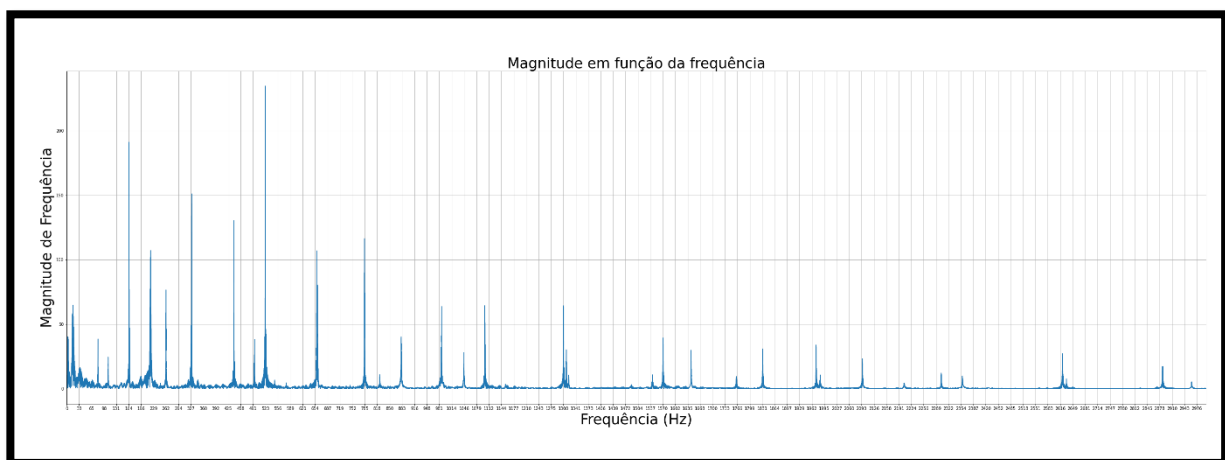


Figura 18 – Gráfico Magnitude de Frequência em função da Frequência, para o acorde de A Menor [2].

— Acorde de E Menor

Como o acorde de acorde de E Menor (Mi Menor) pertence ao campo harmónico dos acordes de G (Sol), as notas desse acorde também pertencem ao campo harmónico de Sol. Então, para o espaçamento do eixo das frequências no gráfico Magnitude-Frequência, utilizou-se a nota G, na oitava de número 1, com uma frequência de 49 Hz [1].

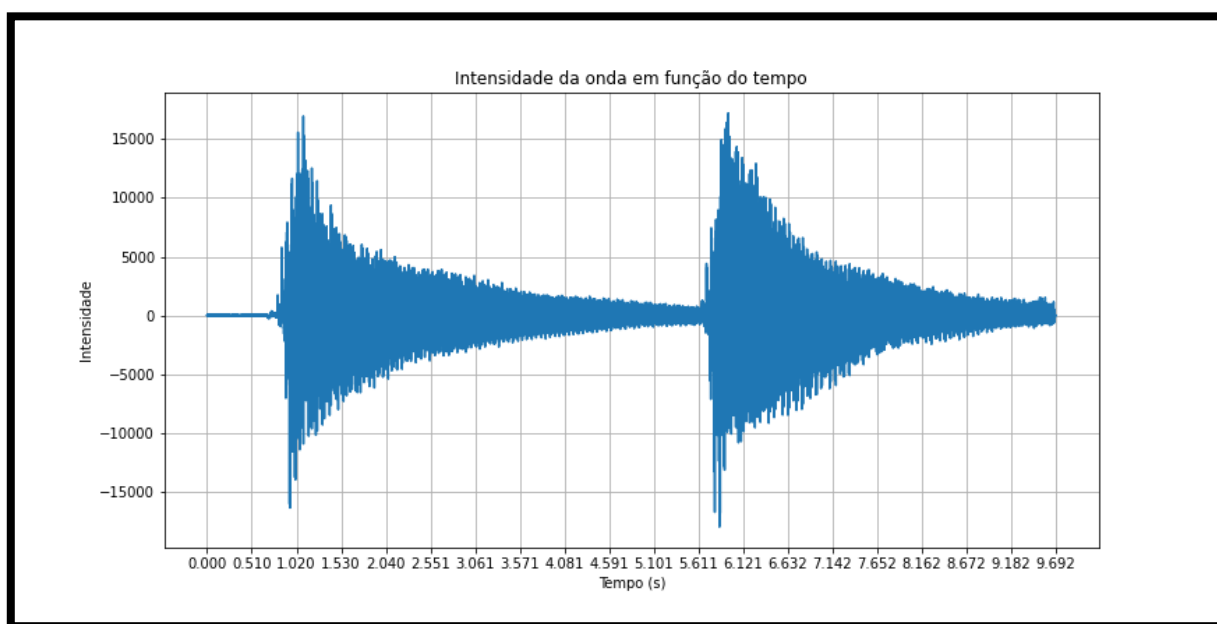


Figura 19 – Gráfico Intensidade em função do Tempo, gravação do acorde de E Menor.

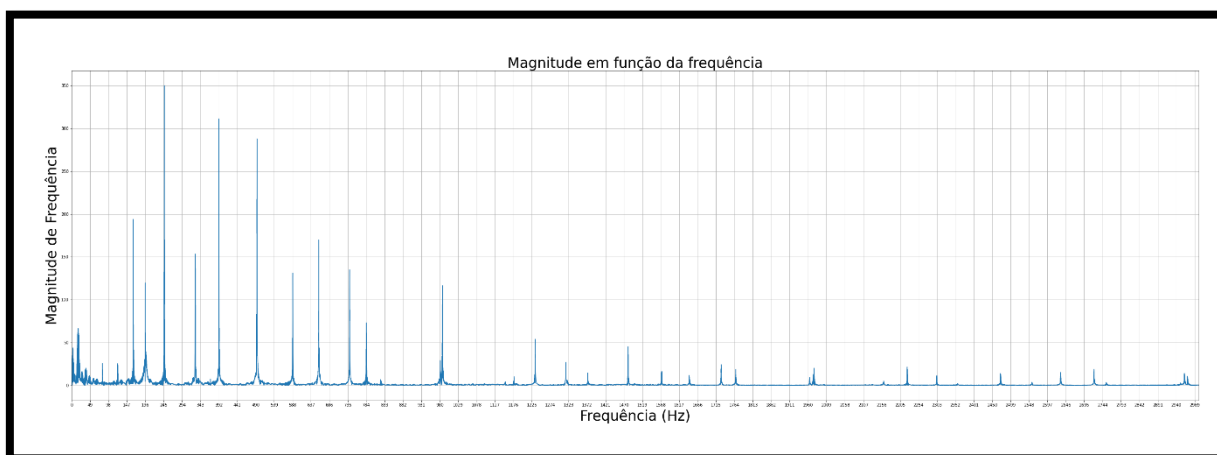


Figura 20 – Gráfico Magnitude de Frequência em função da Frequência, para o acorde de E Menor [2].

iv. Harmónico

Neste caso, fora tocado este harmónico na 12^a casa da guitarra da corda E4.

Para o espaçamento do eixo das frequências no gráfico Magnitude-Frequência, utilizou-se a nota E (Mi), na oitava de número 1, com uma frequência de 41,20 Hz [1].

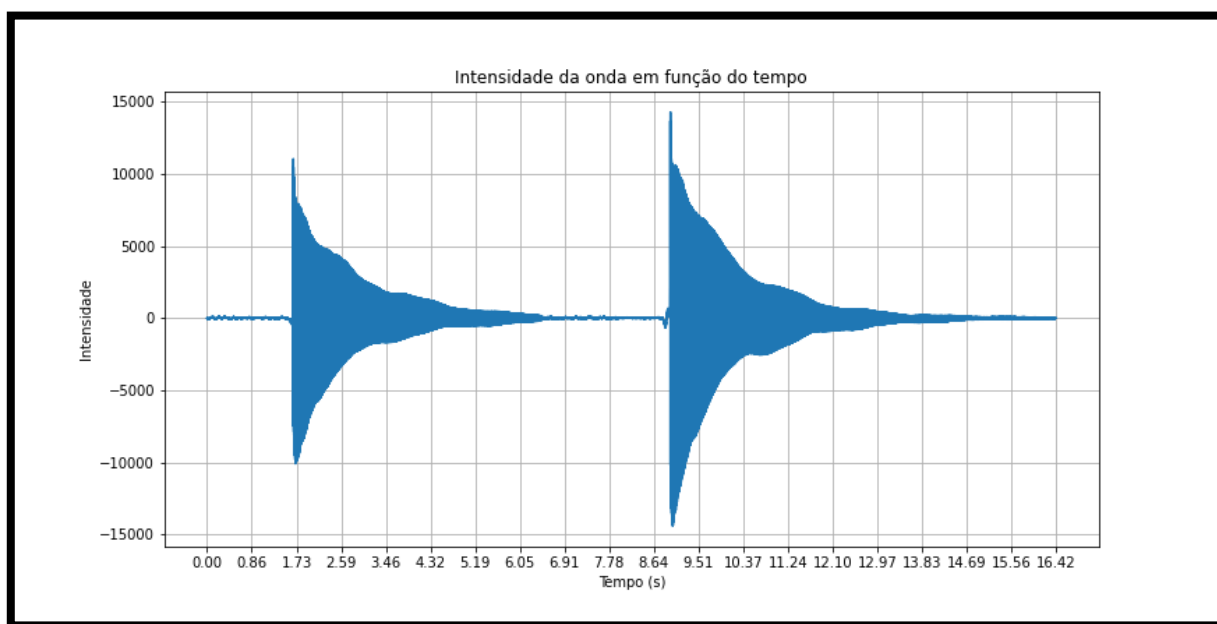


Figura 21 – Gráfico Intensidade em função do Tempo, gravação do harmónico.

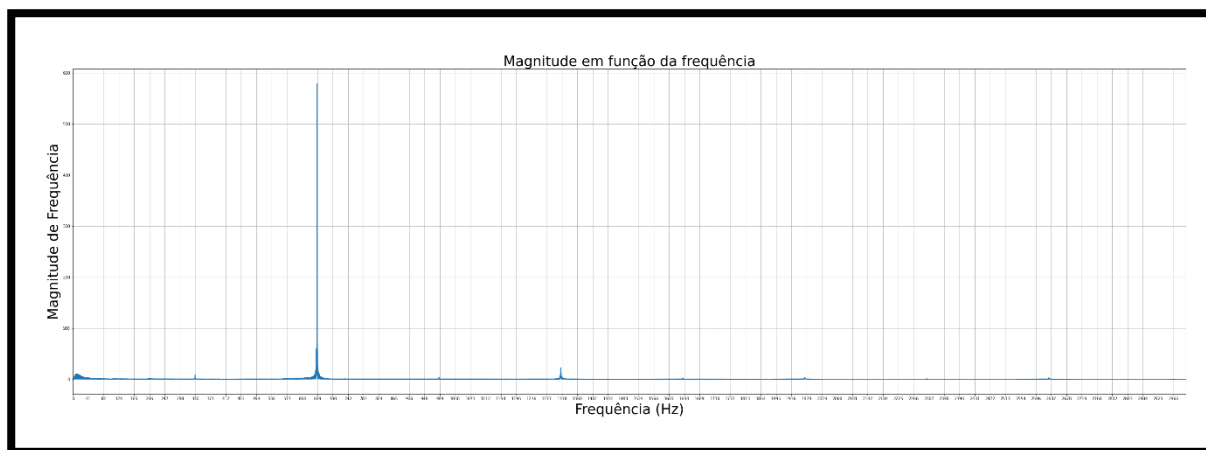


Figura 22 – Gráfico Magnitude de Frequência em função da Frequência, para o harmónico [2].

5. Análise

Observadas as figuras, primeiramente, notamos a diferença entre gráficos no domínio do tempo e no domínio das frequências, tal que era de se esperar.

Impressionantemente, quando olhamos para o caso das cordas soltas, vemos que, embora tenha sido tocada apenas uma nota (cada corda tem sua frequência associada à sua afinação, ou seja, uma nota musical) percebemos a riqueza do som quando vemos as várias propagações de frequência. Na figura 2, tendo sido tocada a corda mais aguda da guitarra na afinação padrão, com sua nota sendo E4, vemos que se destacam dois picos, o primeiro com menor intensidade que o segundo, com frequências aproximadamente iguais a 330 Hz e 659 Hz, respectivamente. Buscando os valores na Tabela de Frequências [1], vemos que tais valores, no campo musical, aproximam-se muito precisamente de E4 e E5, respectivamente. Ou seja, E5, uma nota que teoricamente não foi tocada, de facto, está presente neste som. Também podemos notar que, como o eixo das frequências estão espaçados pela frequência da nota tónica em alguma oitava e teoricamente as notas de um campo harmónico são frações entre si, os picos se dão em cima das marcações do eixo, comprovando assim o esperado, com uma relação de 2, por E5 ser uma oitava acima.

Algo semelhante acontece na figura 8, onde a nota musical tocada é D3, e as frequências presentes que mais se destacam são 147 Hz, 294 Hz e 441 Hz, aproximadamente, associadas muito precisamente a D3, D4 e A4, respectivamente, ou seja, D4, nota uma oitava acima do esperado está presente, mas a presença da nota A4 é curiosa, visto que pertence ao campo harmónico de D maior, mas nem sequer havia sido tocada.

Estas propagações de oitavas aconteceram para todas as cordas soltas, mas as frequências tornam-se muito mais ricas quando um acorde é tocado. Ao vermos a figura 14, notamos a grande quantidade de frequências presentes. Supostamente, visto que a guitarra utilizada tem apenas seis cordas, apareceriam somente seis frequências, o que de facto não acontece. Neste acorde de A maior, notamos a grandeza musical presente, pois percebemos que as frequências presentes estão associadas, de forma muito precisa, a notas musicais como A3, C#4, D4, A4, C#5, E5, A5, B5, C#6, E6 e outras mais. Curiosamente, essas notas, embora não tenham sido tocadas, todas elas pertencem ao campo harmónico de A Maior, o que é fascinante, pois mesmo não sendo tocadas, elas propagam-se misteriosamente.

Semelhantemente, para a figura 18, vemos uma grande quantidade de frequências. Como no âmbito da teoria musical Am (acorde de A Menor) é relativo menor de C (acorde de C Maior), ambas estão associadas e contêm notas do mesmo

campo harmónico, e nesta figura vemos também a riqueza musical presente. Algumas das notas associadas às frequências presentes nesta figura são, muito precisamente, E3, A3, C4, E4, B4, C5, G5, A5 e G6, todas pertencentes ao campo harmónico de C Maior ou A Menor. Semelhantemente, na figura 20, para o acorde de Em (acorde de E Menor, relativo menor do acorde de G Maior), algumas das notas associadas às frequências presentes são G3, B3, G4, B4, D5, F#5, G5, todas pertencentes ao campo harmónico de G Maior ou E Menor.

Por fim, por meios de comparação, tocou-se um harmónico 12^a casa na corda E4, tocando assim, um E5. Ao olharmos para ambas as figuras 2 e 22, percebemos que o harmónico não apresentou propagações de frequência, sendo assim um som puro com uma única frequência fortemente presente, sendo a sua nota associada muito precisamente a E5, mostrando assim o porquê, quando esta é tocada como harmónico, soa diferente do que apenas tocar a nota nesta mesma casa.

6. Conclusão

Ao fim deste trabalho, conclui-se que a Transformada de Fourier não só é interessante como também extremamente útil para a análise de frequências e sinais em geral. Notou-se, nesta atividade, a extrema utilidade da linguagem Python, que entregou todas as ferramentas necessárias para a realização desta atividade.

Além disso, foi demonstrado como a física e a matemática compõem o campo musical, revelando ainda o quão rico, sonoramente, o som de uma guitarra é, ao observarmos as diversas propagações de frequências, todas pertencentes a um campo harmónico específico, e ao vermos, em termos de frequência, a pureza de um harmónico.

7. Referências

- [1] [Tabela de Frequências](#)
- [2] [Gráficos Magnitude-Frequência](#)
- [3] [Modelação em Física e Engenharia, Aulas Teóricas, Tema 04](#)
- [4] [Transformada Rápida de Fourier](#)