
1. Designação da unidade curricular

[4153] Álgebra e Aplicações / Algebra and Applications

2. Sigla da área científica em que se insere

MAT

3. Duração Unidade Curricular Semestral

4. Horas de trabalho 162h 00m

5. Horas de contacto Total: 72h 30m das quais TP: 67h 30m | O: 5h 00m

6. % Horas de contacto a distância Sem horas de contacto à distância

7. ECTS 6

8. Docente responsável e respetiva carga letiva na Unidade Curricular [1671] Filipa Soares de Almeida | Horas Previstas: N/D

9. Outros docentes e respetivas cargas letivas na unidade curricular Não existem docentes definidos para esta unidade curricular

10. Objetivos de aprendizagem e a sua compatibilidade com o método de ensino (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes).

Dar aos alunos os conhecimentos necessários para compreender e trabalhar com as principais ferramentas algébricas a que recorrem as mais importantes aplicações da Álgebra em Análise de Dados/Aprendizagem Automática, Criptografia e Equações Diferenciais. Nomeadamente, pretende-se dar aos alunos conhecimentos sobre:

- fatorizações de matrizes e forma normal de Jordan, e sua aplicação à resolução de SEL e de sistemas de ED, ao método dos mínimos quadrados e à análise de componentes principais (PCA);

- teoria básica de grupos, e sua aplicação à criptografia.

Dominando tanto a fundamentação teórica como a aplicação prática dos tópicos abordados, o estudante deverá ser capaz de resolver problemas nestes domínios, não só por aplicação direta dos algoritmos e métodos estudados como por adaptação dos mesmos a novas situações.

Proporcionar um conhecimento mais sólido da Álgebra, para assim tirar melhor partido do poder desta disciplina na resolução de problemas.

10. Intended Learning objectives and their compatibility with the teaching method (knowledge, skills and competences by the students).

To give students the necessary knowledge to understand and work with the main algebraic tools used in some of the most important applications of Algebra to Cryptography, Data Science/Machine Learning, and

Differential Equations, namely:

- matrix factorizations and Jordan normal form, and its application to the solution of systems of linear equations and of systems of differential equations, the least squares method, and principal components analysis (PCA);

- basic group theory, and its applications to cryptography.

Mastering both the theoretical grounding and the practical applications of the topics studied, the student should be able to solve problems in these areas, not only by direct application of the algorithms and methods studied but also by their adaption to new scenarios.

To provide students a more thorough knowledge of Algebra, in order to enable them to effectively use the power of this discipline in problem solving.

11. Conteúdos programáticos

1. Conceitos básicos sobre grupos: grupo, subgrupo, subgrupo invariante e homomorfismo.
2. Grupos finitos. Teorema de Lagrange. Permutações e grupo simétrico. Teorema de Cayley.
3. Grupos cíclicos. O problema do logaritmo discreto. Aplicações em criptografia.
4. Conceitos de anel e corpo. Anéis de matrizes. Fatorização LU. Aplicação: resolução de sistemas de equações lineares.
5. Polinómio característico e polinómio mínimo de uma matriz. Teorema de Cayley-Hamilton.
6. Diagonalização e forma normal de Jordan. Aplicação: cálculo de potências de matrizes.
7. Exponencial de uma matriz. Aplicação: resolução de sistemas de equações diferenciais.
8. Matrizes ortogonais. Valores singulares e decomposição SVD. Aplicações: pseudo inverso de uma matriz; resolução de sistemas de equações lineares homogéneos e indeterminados; método dos mínimos quadrados e PCA.

11. Syllabus

1. Basic group theory: the notions of group, subgroup, invariant subgroup, and homomorphism.
2. Finite groups. Lagrange's Theorem. Permutations and the symmetric group. Cayley's Theorem.
3. Cyclic groups. The problem of the discrete logarithm. Applications in cryptography.
4. The notions of rings and fields. Matrix rings. LU decomposition. Application: systems of linear equations.
5. The characteristic polynomial and the minimal polynomial of a matrix. Cayley-Hamilton's Theorem. Eigendecomposition and Jordan normal form. Application: powers of a matrix.
6. Matrix exponential. Application: systems of differential equations.
7. Orthogonal matrices. Singular values and SVD decomposition. Applications: pseudoinverse of a matrix; homogeneous systems of linear equations and systems of linear equations with infinite solutions; least squares method and PCA.

12. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

Os itens 1 a 3 desenvolvem a teoria básica de grupos, permitindo concretizar desde logo as aplicações destes à criptografia. As fatorizações LU (item 4) e SVD (item 7), pela importância que têm na resolução de sistemas de equações lineares, são primordiais em inúmeras aplicações provenientes de várias áreas.

A diagonalização e a forma normal de Jordan são desenvolvidas e aplicadas às Equações Diferenciais, na resolução de sistemas de equações diferenciais, nos itens 5 e 6. A fatorização SVD é ainda aplicada à

Análise de Dados/Aprendizagem Automática (método dos mínimos quadrados e PCA).

Ao estender os conceitos e ferramentas básicos adquiridos em Álgebra Linear (itens 4, 5, 6 e 7), introduzir os rudimentos da Álgebra Abstrata (itens 1, 2, 3 e 4) e exemplificar como uma e outra se unificam (itens 4 e 7), o estudante fica detentor de um conhecimento mais abrangente, fiel e sólido da Álgebra e do seu contributo nas aplicações da Matemática.

12. Evidence of the syllabus coherence with the curricular unit's intended learning outcomes

Items 1 to 3 develop the basic group theory that will, in particular, allow for the applications in cryptography. The LU decomposition (item 4) and SVD decomposition (item 7), in view of their importance in the solution of systems of linear equations, are unavoidable in a wide range of applications from various fields. Eigen decomposition and Jordan normal form are developed and applied to Differential Equations, namely in the solution of systems of differential equations, in items 5 and 6. Applications to Data Science/Machine Learning are illustrated in item 7 (least squares method and PCA). By extending the basic notions and tools acquired in the introductory Linear Algebra course (items 4, 5, 6 e 7), introducing the basics of Abstract Algebra (items 1, 2, 3 e 4), and illustrating how one and the other come together in a unified manner (items 4 and 7), the student deepens and widens her/his view of Algebra and of its contributions to the applications of Mathematics.

13. Metodologias de ensino e de aprendizagem específicas da unidade curricular articuladas com o modelo pedagógico

Com recurso ao método teórico-prático, as ferramentas teóricas, devidamente fundamentadas, são motivadas e concretizadas nas aplicações descritas para cada tópico. Listas de exercícios selecionados para as aulas e para trabalho autónomo proporcionam o necessário consolidar dos conhecimentos.

13. Teaching and learning methodologies specific to the curricular unit articulated with the pedagogical model

Classes combine the theoretical exposition of the syllabus with the application(s) of each topic, both as a source of motivation and to lay out its use in problem solving. Sheets of selected exercises, including class and individual work, provide the required consolidation of the knowledge.

14. Avaliação

A avaliação é distribuída com exame final, sendo a avaliação distribuída composta por trabalhos realizados ao longo do semestre, num máximo de 7, e um projeto; o exame é constituído por uma prova escrita e por uma prova oral, à qual têm acesso os estudantes com classificação superior a 8.00 valores na prova escrita. A nota dos trabalhos (NT) é a média das notas dos trabalhos realizados; a nota do exame (NE) é a nota da prova oral ou, caso o estudante seja dispensado desta e não a pretenda realizar, é a nota da prova escrita. Para obter aprovação, o estudante deve atingir uma nota mínima de 9.50 valores em NE e na nota final (NF), onde $NF = 0.15NT + 0.25NP + 0.6NE$ e NP é a nota do projeto.

14. Assessment

The evaluation is distributed assessment with a final exam, with the distributed assessment consisting of up to 7 practice tasks carried out throughout the semester and a project; the exam consists of a written test and an oral test, to which students with a grade higher than 8.00 in the written test have access. The practice tasks grade (NT) is the average of the tasks carried out; the exam grade (NE) is the grade from the oral test or, if the student is exempt from this and does not intend to take it, the grade of the written test. To obtain approval, the student must achieve a minimum grade of 9.50 in both NE and the final grade (NF), where $NF = 0.15NT + 0.25NP + 0.6NE$ and NP is the project grade.

15. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

O desenvolvimento da teoria em conjunto com a sua concretização em aplicações práticas, nas aulas, e a realização dos trabalhos ao longo do semestre e do desenvolvimento projeto, por parte do aluno, asseguram que o estudante amplie os seus conhecimentos nos tópicos descritos com ênfase na resolução de problemas.

15. Evidence of the teaching methodologies coherence with the curricular unit's intended learning outcomes

The development of the theory in parallel with its application, in class, along with the solution of the practice tasks and of the development of the project, ensure that students learn the intended topics with an emphasis in problem solving.

16. Bibliografia de consulta/existência obrigatória

1. Anton, H., Rorres, C., "Álgebra Linear com Aplicações", Bookman, 10th edition, 2012.
2. Byrne, C., "Applied and Computational Linear Algebra: A First Course", 2016. Disponível em <http://faculty.uml.edu/cbyrne/aclafctext.pdf>.
3. I. Goodfellow, Y. Bengio, A. Courville, "Deep Learning", MIT Press, 2016.
4. M. W. Hirsh, S. Smale, "Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra", Academic Press, 1974.
5. Olver, P. J., Shakiban, C., "Applied Linear Algebra", Pearson Prentice Hall, 2006.
- 6 Judson, T. W., "Abstract Algebra: Theory and Applications", 2016. Disponível em <https://open.umn.edu/opentextbooks/textbooks/abstract-algebra-theory-and-applications>.
7. Strang, G., "Linear Algebra and its Applications", Brooks/Cole, 4th edition, 2005.

17. Observações

Unidade Curricular Opcional