Prova de ingresso escrita específica para avaliar a capacidade para a frequência do ciclo de estudos de licenciatura, para alunos internacionais, Decreto-Lei nº 36/2014 de 10 de março

AVALIAÇÃO DA CAPACIDADE PARA A FREQUÊNCIA DE CURSO DE LICENCIATURA

11 de Abril de 2023 **PROVA DE MATEMÁTICA 2023** Duração: 90 minutos

---

Leia com atenção:
Este exame tem duas partes.
O **Grupo A** (questões **1.** a **4.**) é constituído por perguntas de escolha múltipla. Como tal, cada resposta errada desconta 1/4 da cotação da mesma.
O **Grupo B** (questões **5.** a **7.**) é constituído por perguntas de desenvolvimento. **Justifique todas as suas respostas.**
No final da prova deve digitalizar a sua resolução, **legível** e enviar o documento através do chat do zoom ou para o email: celia.fernandes@isel.pt

Grupo A

1. Para um certo número real k, é continua a função f , de domínio $\mathbb{R}$ definida por: **[1.5]**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , \text{ se } x > 0 \\ \mathrm{e}^{3x} + \ln k & , \text{ se } x \leq 0 \end{cases} .$$

O valor de k é:

(A) π **(B)** e **(C)** 1 **(D)** 2

---

2. Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$). Tem-se que: **[1.5]**

$$P\left[A \cap \overline{B}\right] = 0,2 \qquad P[B] = 0,6 \qquad P[A \mid B] = \frac{1}{3}.$$

O valor de $P\left[\overline{A} \cap \overline{B}\right]$ é:

(A) $0,8$ **(B)** 1 **(C)** $0,4$ **(D)** $0,2$

[1.5] **3.** Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que a sua derivada de primeira ordem, f', é definida por: $f'(x) = 3x^2 - 3$. Relativamente ao gráfico da função f, qual das afirmações seguintes é falsa?

(A) Tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$.

(B) Tem um ponto de inflexão em $x = 1$.

(C) Tem um máximo para $x = -1$.

(D) É estritamente decrescente em $[-1, 1]$.

[1.5] **4.** Se $f(x) = x^2 \cos x$, então $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ é igual a:

(A) $-\pi$

(B) π

(C) $-\frac{\pi^2}{4}$

(D) $\frac{\pi^2}{4}$.

Grupo B

5. A administração de uma empresa pública concluiu que 30% dos seus funcionários não tinham as características necessárias para serem considerados competentes. Era necessário abrir um concurso para admitir novo pessoal. Para tal foi elaborado um teste que foi aplicado aos que já eram funcionários da empresa. Verificou-se que só 90% dos funcionários competentes passaram no teste e 20% dos não competentes também passaram. Com base nos resultados obtidos é feita a selecção dos novos funcionários. Calcule a probabilidade de um candidato:

[1.5] **a)** a funcionário, escolhido ao acaso, ter passado no teste.

[1.5] **b)** ser competente, sabendo que ele não passou no teste.

[1.0] **c)** ter passado no teste e não ser competente.

[1.0] **c)** não ter passado no teste ou ser competente.

---

6. Considere as funções reais de variável real $f(x) = (x^2 - x - 5)\,\mathrm{e}^x$ e $g(x) = x^2 - 4$.

[1.5] **a)** Mostre que $f'(x) = (x^2 + x - 6)\,\mathrm{e}^x$.

[2.0] **b)** Estude f quanto à monotonia e existência de extremos.

[1.5] **c)** Calcule $\lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g(x)}$.

---

7. Em $\mathbb{C}$ considere os números complexos $z_1 = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$, $z_2 = -3i$ e $z_3 = \operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$.

[2.0] **a)** Represente na forma trigonométrica: $\frac{z_1 \times z_2}{-z_3}$.

[2.0] **b)** Represente na forma algébrica e na forma trigonométrica: $1 + z_3$.

FIM.

Soluções:

Questão	1	2	3	4
Respostas	C	D	B	C

Exercício 5:

a) Consideremos os acontecimentos:

- C - "funcionário ser competente";
- T - "funcionário passar no teste".

Através do enunciado temos:

- $P\left[\overline{C}\right] = 0,3$;
- $P\left[T \mid C\right] = 0,9$;
- $P\left[T \mid \overline{C}\right] = 0,2$;

Pelo teorema da probabilidade total tem-se $P\left[T\right] = P\left[C \cap T\right] + P\left[\overline{C} \cap T\right] = P\left[C\right] \times P\left[T \mid C\right] + P\left[\overline{C}\right] \times P\left[T \mid \overline{C}\right] = 0,7 \times 0,9 + 0,3 \times 0,2 = 0,69$.

b) Pelo teorema de Bayes tem-se $P\left[C|\overline{T}\right] = \frac{P\left[C \cap \overline{T}\right]}{P\left[\overline{T}\right]} = 0,2258$.

c) $P\left[T \cap \overline{C}\right] = P\left[\overline{C}\right] \times P\left[T \mid \overline{C}\right] = 0,06$.

d) $P\left[\overline{T} \cup C\right] = P\left[\overline{T}\right] + P\left[C\right] - P\left[\overline{T} \cap C\right] = 0,94$.

Exercício 6:

a) $f'(x) = \left(x^2 - x - 5\right)' e^x + \left(x^2 - x - 5\right)\left(e^x\right)' = (2x - 1)\, e^x + \left(x^2 - x - 5\right) e^x = \left(x^2 + x - 6\right) e^x$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + x - 6\right) e^x = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$.

x	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
$x^2 + x - 6$	$+$	0	-	0	$+$
e^x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	-	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$7e^{-3}$	$\searrow$	$-3e^2$	$\nearrow$

- $f(x)$ é estritamente crescente em $\left]-\infty; -3\right] \cup \left[2; +\infty\right[$.
- $f(x)$ é estritamente decrescente em $\left[-3; 2\right]$.
- $f(x)$ tem um máximo local em $x = -3$, igual a $7e^{-3}$.
- $f(x)$ tem um mínimo local em $x = 2$, igual a $-3e^2$.

c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{f'(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x^2+x-6)\,e^x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x+3)(x-2)\,e^x}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x+3)\,e^x}{(x+2)} = \dfrac{5}{4}e^2$.

Em alternativa, o limite também pode ser obtido usando a regra de *Cauchy*.

Exercício 7:

a)

- $z_1 = 2\,\text{cis}\,\dfrac{\pi}{4}$
- $z_2 = -3i = 3\,\text{cis}\,\dfrac{3\pi}{2}$
- $-1 = \text{cis}\,\pi$
- $z_3 = \text{cis}\,\dfrac{\pi}{3}$

logo $\dfrac{z_1 \times z_2}{-z_3} = 6\,\text{cis}\,\dfrac{5\pi}{12}$.

b) $1 + z_3 = 1 + \text{cis}\,\dfrac{\pi}{3}$

Forma algébrica: $1 + z_3 = 1 + \left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Forma trigonométrica: $\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,\text{cis}\,\dfrac{\pi}{6}$