Prova de ingresso escrita específica para avaliar a capacidade para a frequência do ciclo de estudos de licenciatura, para alunos internacionais, Decreto-Lei nº 36/2014 de 10 de março

AVALIAÇÃO DA CAPACIDADE PARA A FREQUÊNCIA DE CURSO DE LICENCIATURA

03 de Abril de 2024 **PROVA DE MATEMÁTICA 2024** Duração: 90 minutos

---

Leia com atenção:
Este exame tem duas partes.
O **Grupo A** (questões **1.** a **4.**) é constituído por perguntas de escolha múltipla. Como tal, cada resposta errada desconta 1/4 da cotação da mesma.
O **Grupo B** (questões **5.** a **7.**) é constituído por perguntas de desenvolvimento. **Justifique todas as suas respostas.**
No final da prova deve digitalizar a sua resolução, **legível** e enviar o documento através do chat do zoom ou para o email: celia.fernandes@isel.pt

Grupo A

1. $\log_3(3x^2) - \log_3 x$ é igual a: **[1.5]**

(A) $3\log_3 x$ **(B)** $1 + \log_3 x$ **(C)** $\log_3 x^3$ **(D)** $2\log_3 x$

2. Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$). Sabe-se que: **[1.5]**

$$P\left[\,\overline{A}\,\right] = 0,9 \qquad P[A \cup B] = 0,73$$

e que A e B são dois acontecimentos independentes. Qual é o valor de $P[B]$?

(A) $0,63$ **(B)** $0,657$ **(C)** $0,073$ **(D)** $0,7$

3. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por: **[1.5]**

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(1-x) & , \text{ se } x \leq 0 \\ \dfrac{1-3x}{1-\mathrm{e}^{-x}} & , \text{ se } x > 0 \end{cases}.$$

Qual é o valor de $f'(-1)$?

(A) $0,5 + \ln(2)$ **(B)** $-0,5 + \ln(2)$ **(C)** $0,5 - \ln(2)$ **(D)** $-0,5 - \ln(2)$

4. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$? **[1.5]**

(A) 0 **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** 2

Grupo B

5. Numa população, 10% das pessoas adquirem o jornal X, 23% o jornal Y e 5%, ambos os jornais. Ao escolher uma pessoa dessa população e ao acaso, determine a probabilidade de:

[1.0] **a)** adquirir apenas o jornal X.

[1.0] **b)** adquirir pelo menos um dos jornais.

[1.0] **c)** não adquirir nenhum dos jornais.

[1.0] **d)** adquirir o jornal X sabendo que adquire o jornal Y.

---

6. Considere a função f, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x & , \text{ se } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 5}{x - 3} & , \text{ se } x \geq 0 \end{cases} .$$

[1.0] **a)** Determine o domínio da função.

[2.0] **b)** Estude a continuidade da função.

[1.5] **c)** Determine $f'(x)$, a derivada da função $f(x)$.

[1.0] **d)** Determine os zeros da função derivada $f'(x)$.

---

7. Em $\mathbb{C}$ considere os números complexos $z_1 = 4i$, $z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$, $z_3 = -3 + \sqrt{3}i$ e $z_4 = 8 \operatorname{cis} \dfrac{4\pi}{3}$

[2.0] **a)** Escreva os números complexos z_1, z_2 e z_3 na forma trigonométrica.

[1.0] **c)** Escreva o número complexo z_4 na forma algébrica.

[1.5] **c)** Efectue e represente na forma trigonométrica: $\dfrac{z_2 \times z_4}{z_1}$.

FIM.

Soluções:

Questão	1	2	3	4
Respostas	B	D	A	D

Exercício 5:
Consideremos os acontecimentos:

- X - "adquirir o jornal X";
- Y - "adquirir o jornal Y".

Através do enunciado temos:

- $P[X] = 0,1$;
- $P[Y] = 0,23$;
- $P[X \cap Y] = 0,05$;

a) $P\left[X \cap \overline{Y}\right] = P[X] - P[X \cap Y] = 0,05$.

b) $P[X \cup Y] = P[X] + P[Y] - P[X \cap Y] = 0,28$.

c) $P\left[\overline{X} \cap \overline{Y}\right] = 1 - P[X \cup Y] = 0,72$.

d) $P[X \mid Y] = \dfrac{P[X \cap Y]}{P[Y]} = 0,2174$.

Exercício 6:

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

b) Se $x < 0$, a função é contínua pois é a soma de duas funções contínuas, a função exponencial e uma função polinomial. Se $x > 0$ a função é contínua porque é uma função racional, logo é contínua no domínio da função ($\mathbb{R}^+ \setminus \{3\}$).

Se $x = 0$ a função é contínua se existe $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$ e $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = f(0)$.

Como $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} (\mathrm{e}^x + x) = 1$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \left(\dfrac{x^2 - 5}{x - 3}\right) = \dfrac{5}{3}$ e $f(0) = \dfrac{5}{3}$, a função $f(x)$ apenas é contínua à direita de zero.

Assim, a função f é contínua em todo o seu domínio exceto no ponto de abcissa zero.

c) Se $x < 0$, temos $f'(x) = \mathrm{e}^x + 1$. Se $x > 0$, temos $f'(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2}$.

Se $x = 0$, temos $f'(0^-) = +\infty$ e $f'(0^+) = \dfrac{5}{9}$, logo não existe $f'(0)$ porque $f'(0^-) \neq f'(0^+)$.

Assim,

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x + 1 & , \text{ se } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} & , \text{ se } x > 0 \end{cases}.$$

d) Se $x < 0$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = -1$ que é impossível.

Se $x > 0$, temos $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \wedge (x-3)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$ $x = 1 \vee x = 5 \wedge x \neq 3$. A função derivada tem dois zeros nos pontos de abcissa 1 e 5.

Exercício 7:

a)
- $z_1 = 4 \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{2}$
- $z_2 = \sqrt{6} \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{4}$
- $z_3 = \sqrt{12} \operatorname{cis} \dfrac{5\pi}{6}$

b) $z_4 = -4 - 4\sqrt{3}i$

c) $\dfrac{z_2 \times z_4}{z_1} = 2\sqrt{6} \operatorname{cis} \dfrac{13\pi}{12}$