ISEL
INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Resolução da Prova Modelo

Grupo A

1. Considere os seguintes vetores: **[1.5]**

$$\vec{u} = (2, 1, -1) \quad , \quad \vec{v} = (-1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \quad \text{e} \quad \vec{w} = (1, -1, 1)\,.$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares, $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são colineares e $\|\vec{w}\| = \sqrt{3}$.

(B) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são perpendiculares e $\|\vec{u}\| = \sqrt{6}$.

(C) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são perpendiculares e $\|\vec{w}\| = 3$.

(D) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares, $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são colineares e $\|\vec{u}\| = 6$.

Temos que $\vec{u} = -2\vec{v}$, logo os vetores são colineares. Por outro lado o produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{w}$ é igual a zero, portanto os vetores são perpendicular e

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}.$$

Resposta (B).

---

2. Numa experiência aleatória, os acontecimentos A e B são independentes. Se $P(A) = 0.4$ e $P(A \cap B) = 0.28$ então o valor de $P(A \cup B)$ é: **[1.5]**

(A) 0.82 **(B)** 0.72 **(C)** 0.7 **(D)** 0.68

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + P(B) - 0.28.$$

Por outro lado, como A e B são acontecimentos independentes

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.28}{0.4} = 0.7.$$

Portanto, $P(A \cup B) = 0.4 + 0.7 - 0.28 = 0.82$
Resposta (A).

[1.5] **3.** O $\lim_{x\to+\infty} 2x^5e^{-x}$ é igual a

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 2 **(D)** $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^5e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5}{e^x} = 0,$$

porque o denominador (exponencial) cresce mais depressa que o numerador (função polinomial). Resposta (B).

[1.5] **4.** A reta de equação $y = x$ é tangente ao gráfico de uma certa função f, no ponto de abcissa 0. Qual das seguintes expressões pode definir a função f

(A) $x^2 + x$ **(B)** $x^2 + 2x$ **(C)** $x^2 + 2x + 1$ **(D)** $x^2 + x + 1$.

O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 0$ é igual a $f'(0)$, por outro lado é igual a 1. Apenas as alíneas (A) e (D) têm $f'(0) = 1$. A reta $y = x$ passa na origem, as alineas (A) e (B) passam na origem.
Resposta (A).

Grupo B

[4.5] **5.** Um grupo de jovens, formado por 5 rapazes e 5 raparigas, vai dividir-se em duas equipas de 5 elementos cada uma, para disputarem um jogo.

a) Supondo que a divisão é feita ao acaso, qual a probabilidade de as duas equipas ficarem constituídas por elementos todos do mesmo género?
R:$\frac{1}{\binom{10}{5}}$.

b) O grupo tem dez camisolas numeradas de 1 a 10. Supondo que são distribuídas ao acaso, qual a probabilidade das raparigas ficarem todas com números pares?
R: $\frac{5!5!}{10!}$.

c) No final do jogo, os dez alunos dispõem-se (ao acaso) em fila, para uma fotografia. Supondo que têm todos alturas diferentes, qual a probabilidade de ficarem ordenados por alturas? R: $\frac{2}{10!}$.

[5.5] **6.** Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x(x^2 + x)$. Recorrendo **exclusivamente a processos analíticos**, resolva as alíneas seguintes.

a) Verifique que $f'(x) = e^x(x^2 + 3x + 1)$ e determine a equação da reta tangente a f no ponto de abcissa 0.

R: $f'(x) = (e^x)'(x^2 + x) = e^x(x^2 + x)' = e^x(x^2 + x + 2x + 1) = e^x(x^2 + 3x + 1)$ A reta tangente a f no ponto de abcissa 0 é

$$(y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

Temos que $f'(0) = e$ e $f(0) = 0$, portanto a equação da reta é $y = ex + e$.

b) Estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

R: Para estudar f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, temos que calcular a segunda derivada de f, f'' e estudar os seus zeros e sinal.
$f''(x) = e^x(x^2 + 5x + 4)$. Os zeros de $f''(x)$, são tais que $x^2 + 5x + 4 = 0$, ou seja, $x = -1$ ou $x = -4$.

Quadro de sinais

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	-	0	$+$	$+$
f(x)	$\cup$	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$	$\cup$

c) Determine, caso existam, as assíntotas verticais horizontais de f.

R:A funçao é contínua em $\mathbb{R}$, portanto não tem assíntotas verticais. Para analisarmos a existência de assíntotas horizontais temos que calcular os limites de f em $-\infty$ e $+\infty$. Ora,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Portanto, $y = 0$ é a única assíntota horizontal de f.

---

7. Considere os números complexos **[3.0]**

$$w = 1 + 2i\,, \quad z = 1 + 3i \ \text{ e } \quad t = -4 + 4i\,.$$

a) Escreva t na forma trigonométrica e esboce a representação gráfica de z e w.

R: O número complexo t está no segundo quadrante e o seu módulo é igual a

$$|t| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

. Temos também que $\tan\arg(t) = \frac{4}{-4} = -1$, portanto $\arg t = \dfrac{3\pi}{4}$. Logo

$$t = 4\sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}.$$

b) Calcule $(\frac{w-1}{2})^7 \times \frac{10}{z}$ na forma algébrica.

R: $(\frac{w-1}{2})^7 \times \frac{10}{z} = (\frac{2i}{2})^7 \times \frac{10}{1+3i} = -i \times \frac{10}{1+3i} = -i \times \frac{10}{1+3i}\frac{1-3i}{1-3i} = \frac{-10i}{10}(1 - 3i) = 3 - i.$

FIM.